

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
Программа повышение конкурентоспособности ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Стратегическая инициатива 7 «Достижение лидирующих позиций в области
суперкомпьютерных технологий и высокопроизводительных вычислений»**

Основные образовательные программы
Радиофизика, Информационные технологии,
Информационная безопасность телекоммуникационных систем

Учебно-методическая разработка по дисциплинам
Физическая электроника, Электроника и схемотехника

А.В. Климов, В.Н. Мануилов, В.Ю. Заславский

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГРУППИРОВКИ
ЭЛЕКТРОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЛАМПЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ
ВЫЧИСЛЕНИЙ**

Нижний Новгород,
2014 год

УДК 621.38(075)
ББК 32.85Я73
М 24

М 24 Климов А.В., Мануилов В.Н., Заславский В.Ю. Численное моделирование процесса группировки электронов в релятивистской лампе бегущей волны с использованием высокопроизводительных вычислений: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 40 с.

Пособие предназначено для студентов дневного и вечернего отделений, изучающих курсы «Электроника и схемотехника» и «Физическая электроника».

Публикация учебного пособия поддержана программой повышения конкурентоспособности ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

УДК 621.38(075)
ББК 32.85Я73

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Принцип действия и схема ЛБВ	5
2. Оценка оптимальных параметров	12
3. Основные уравнения теории ЛБВ	15
4. Методика численного моделирования	20
5. Описание программы моделирования	22
6. Возможность использования параллельных вычислений	29
Заключение	34
Список литературы	35
Практическое задание и контрольные вопросы	36
Приложение. Дисперсионная характеристика волновода	39

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе приводится краткая теория релятивистской ЛБВ типа О, включающая вывод основных уравнений для фазы и энергии электронов, необходимые условия и оценки оптимальных параметров для достижения максимального КПД прибора, а также методика численного моделирования процессов группировки электронов в ЛБВ с описанием программы численного моделирования.

1. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ И СХЕМА ЛБВ.

Лампой бегущей волны типа О называют электронный прибор СВЧ диапазона, в котором используется длительное взаимодействие прямолинейного потока электронов с полем замедленной электромагнитной волны малой амплитуды, распространяющейся вдоль электродинамической системы. ЛБВ нашли широкое применение как усилители и генераторы в радиолокации, спутниковых системах связи и т.д.

Принципиальная схема ЛБВ показана на рисунке 1.1. Основными частями ЛБВ являются электронная пушка (катод и анод), формирующая прямолинейный пучок, замедляющая система, коллектор для сбора «отработавших» электронов и соленоид, создающий фокусирующее магнитное поле \vec{B} (последнее препятствует смещению электронов в поперечной плоскости).

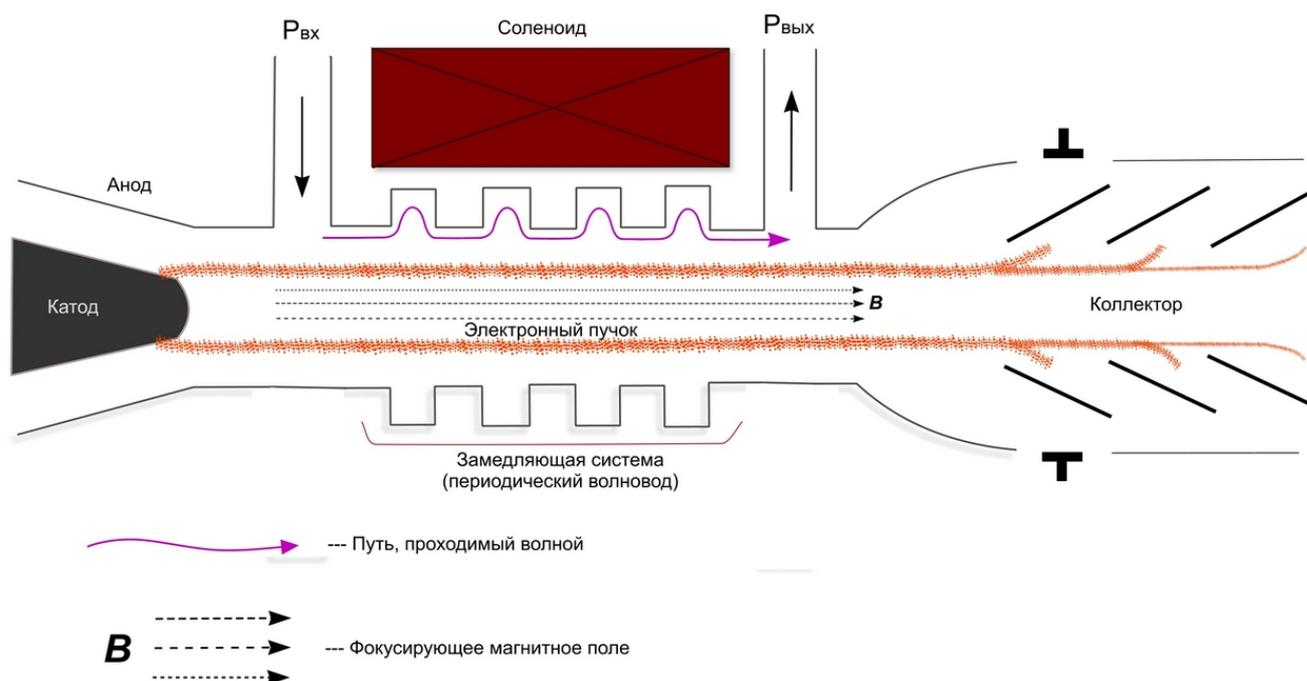


Рис. 1.1 Принципиальная схема ЛБВ типа О

Электрическое поле \vec{E} электромагнитной волны, распространяющейся вдоль замедляющей системы (ЗС), обычно представляющей собой периодическую структуру (см. рис.1.1, где изображен один из возможных вариантов ЗС), можно

согласно теореме Флоке представить в виде суммы пространственных гармоник (плоских неоднородных волн) как

$$\vec{E} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{E}_m(x, y) e^{i(\omega t - \beta_m z)}, \quad (1.1)$$

Здесь ω – частота, E_m и β_m – соответственно амплитуда и постоянная распространения m -ой гармоники.

Эффективное взаимодействие электронного потока с электромагнитной волной достигается, когда фазовая скорость

$$v_{\phi}^m = \frac{\omega}{\beta_m} \quad (1.2)$$

близка к продольной скорости $v_{||}$ электронов, определяемой потенциалом U замедляющей системы относительно катода. При этих условиях в системе отсчета, связанной с электроном, поля всех гармоник, кроме m -ой, оказываются быстро осциллирующими и практически не оказывают влияния на движение электронов. При условии черенковского синхронизма

$$v_{||} \approx v_{\phi}^m \quad (1.3)$$

электроны под действием поля m -ой гармоники $E_m(x, y) e^{i(\omega t - \beta_m z)}$ группируются в сгустки в тормозящей фазе электрического поля и отдают ему свою кинетическую энергию. Рисунок 1.2 иллюстрирует процесс образования сгустков в условиях точного синхронизма ($v_{||} = v_{\phi}^m$). Здесь по оси ординат отложена ВЧ сила, действующая на электрон, а стрелками указано направление движения частиц. Предполагается, что частицы (отмечены точками) равномерно распределены по фазам ВЧ поля на входе в замедляющую систему.

Как видно, центр электронного сгустка образуется в нуле электрического поля при переходе фазы поля из ускоряющей в тормозящую. Если теперь несколько увеличить скорость электрона ($v_{||} > v_{\phi}^m$) сгусток оказывается в тормозящей фазе и электроны начинают отдавать свою кинетическую энергию бегущей волне.

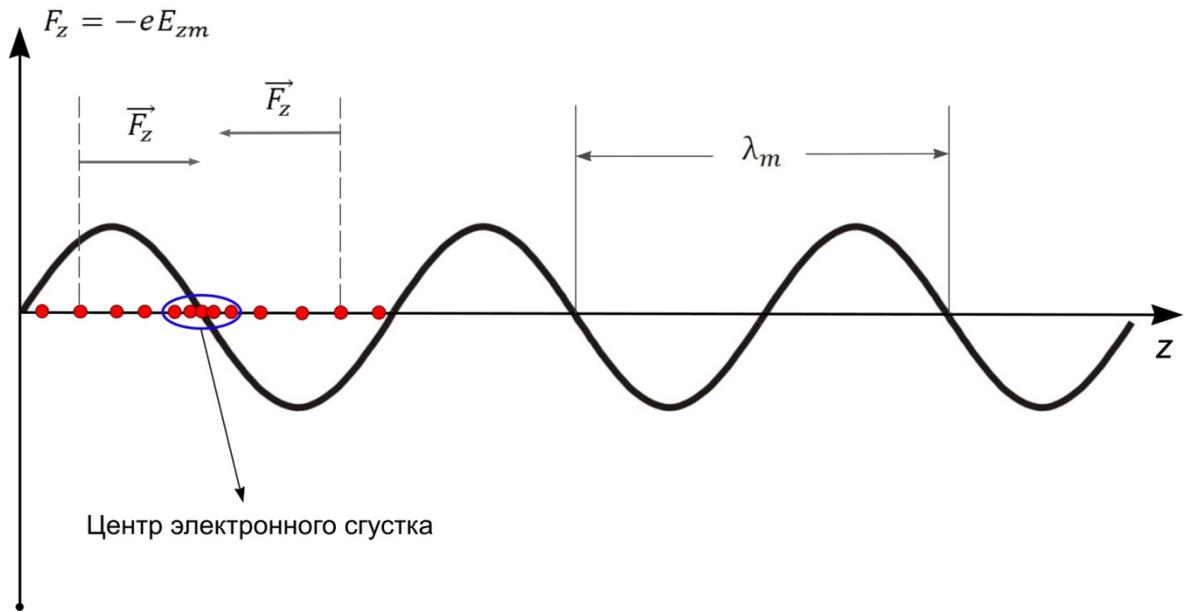


Рис. 1.2 Влияние электромагнитной волны на формирование сгустков при условии точного синхронизма

Для того чтобы определить соотношение между фазовой скоростью волны и продольной скоростью электронов используют понятие рабочей точки, то есть точки пересечения дисперсионной характеристики волновода (зависимость частоты ω от продольного волнового числа β_m) и дисперсионной кривой пучка, представляющей собой прямую. Для выполнения условия черенковского синхронизма необходимо чтобы фазовая скорость (дисперсионная кривая пучка на рисунке)

$$v_{phas} = \frac{\omega}{\beta_m} = \sqrt{2eU/m} = \sqrt{2\eta U} = v_{||}^e$$

при изменении ускоряющего напряжения принимала значения

$$\frac{\omega}{\beta_m} < c.$$

Отсюда видно, что при достаточно низких частотах $v_{phas} > c$ и выполнить условия синхронизма в ЛБВ невозможно.

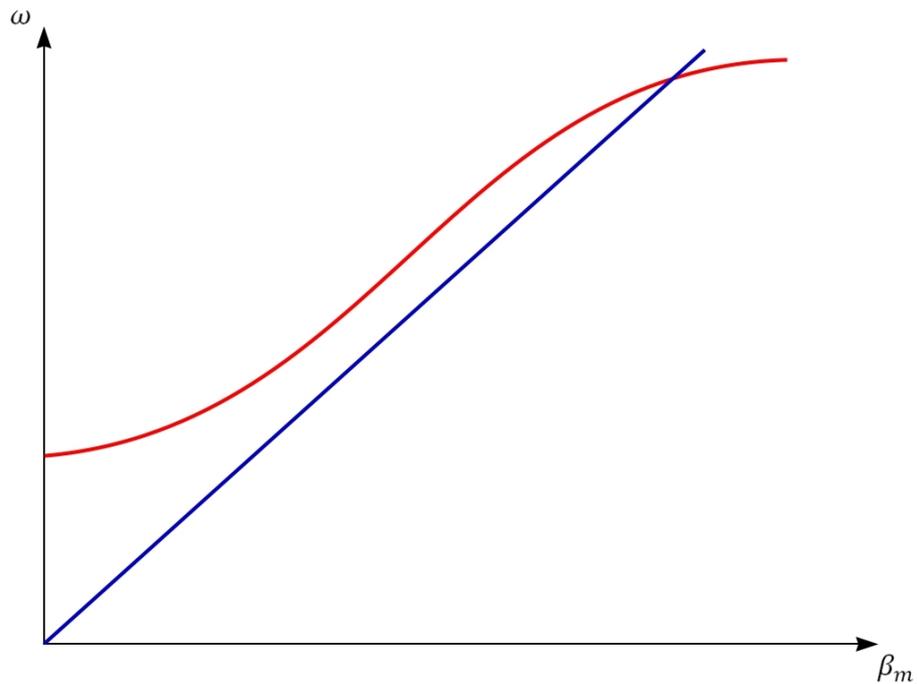


Рис. 1.3 Положение рабочей точки на пересечении дисперсионных кривых волновода и пучка

С ростом номера гармоники m амплитуды членов ряда Фурье (1.1) непосредственно у поверхности замедляющей системы падают. Кроме того, поскольку электромагнитная волна является замедленной, электрическое поле прижато к замедляющей системе и экспоненциально спадает по мере удаления от поверхности по закону

$$e^{-\frac{2\pi y}{\lambda_m}},$$

где $\lambda_m = \frac{2\pi}{\beta_m}$ – замедленная длина волны m -ой пространственной гармоники, y – расстояние от замедляющей системы, β_m – постоянная распространения.

Постоянная распространения определяется как

$$\beta_m = \frac{\varphi}{D} + \frac{2\pi m}{D}, \quad (1.4)$$

где φ – сдвиг фазы поля на периоде системы D .

На рисунке 1.4 видно, что при использовании пространственных гармоник с $m > 1$ пришлось бы проводить электронный поток слишком близко к замедляющей

системе, что приводит к ограничению тока пучка и сложности юстировки системы, особенно сильным в миллиметровом диапазоне.

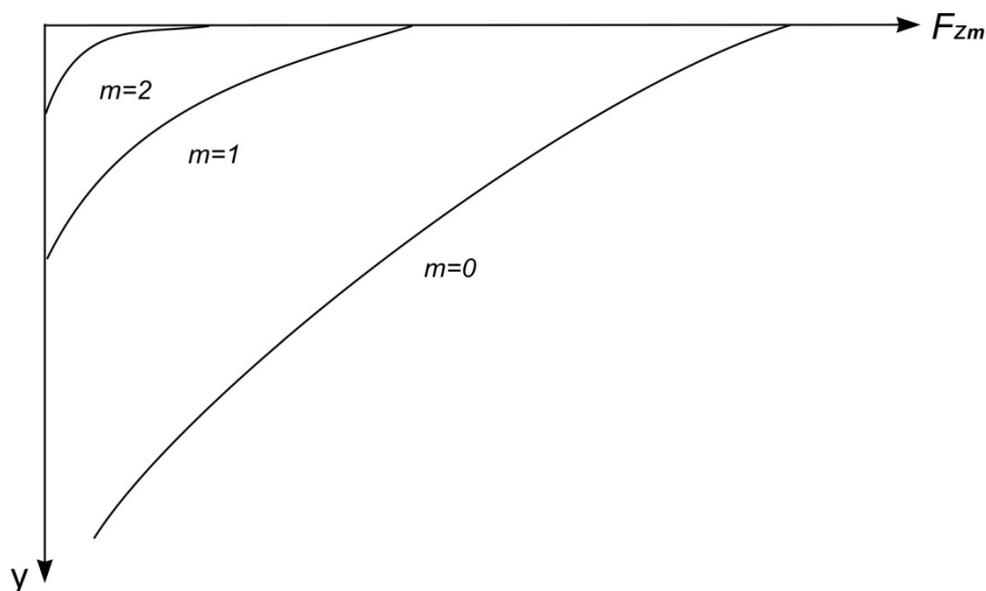


Рис. 1.4 Зависимость амплитуд пространственных гармоник от поперечной координаты y

Замедленная длина волны выражается через длину волны λ в свободном пространстве как

$$\lambda_m = \frac{\lambda}{\xi}, \quad (1.5)$$

где $\xi = \frac{c}{v_\phi} \approx \frac{16}{\sqrt{U_{\text{кВ}}}}$ — замедление (формула справедлива в нерелятивистском приближении при $U < 100$ кВ). Видно, что указанные выше трудности тем больше, чем меньше ускоряющее напряжение U .

Исторически первыми появились нерелятивистские ЛБВ с ускоряющим напряжением несколько кВ и замедлением $\xi = 10$. В настоящее время в связи с появлением сильноточных ускорителей заряженных частиц успешно разрабатываются и применяются релятивистские ЛБВ. В частности, импульсная мощность таких приборов достигает уровня десятков мегаватт в миллиметровом диапазоне длин волн при длительности импульса $\tau = 10 - 20$ наносекунд. В таких системах электроны движутся со скоростью, близкой к скорости света, что позволяет использовать малые величины замедления

$\xi \leq 1,1$. В результате поле меньше прижимается к замедляющей системе, что делает менее жесткими требования к юстировке и толщине пучка. Упрощается и конструкция замедляющей системы, которую в этом случае можно делать более крупномасштабной (характерный размер $\sim \lambda_m$). На практике замедляющая система релятивистских ЛБВ выполняется обычно в виде отрезков слабоффрированных волноводов.

Так как строгий анализ релятивистской ЛБВ сложен, для рассмотрения основных особенностей ее работы сделаем следующие упрощающие предположения:

1. Электрическое поле слабо меняется на поперечном размере пучка ΔR_0 .
2. Движение электронов одномерное.
3. Влияние пространственного заряда на параметры пучка пренебрежимо мало.
4. Ускоряющие напряжения настолько велики, что $v_{||} \approx c$, а релятивистский фактор

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_{||}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{m}{m_0} \gg 1$$

(здесь m и m_0 – релятивистская масса и масса покоя электрона соответственно).

5. Наконец, будем предполагать, что амплитуда поля E_0 бегущей волны не зависит от продольной координаты. Как известно, в линейном приближении поле бегущей волны экспоненциально нарастает вдоль замедляющей системы. Однако, если коэффициент усиления волны за один проход вдоль системы мал, а коэффициенты отражения от концов замедляющей системы $\Gamma \approx 1$, то распределение поля в лампе близко к полю стоячей волны. Последнее можно представить в виде суммы двух бегущих волн постоянной амплитуды – попутной и встречной, причем в силу условий синхронизма (1.3) электроны взаимодействуют только с попутной волной. На практике такая ситуация реализуется в так

называемой резонансной ЛБВ. Амплитуда поля E_0 определяется балансом между энергией, вносимой в замедляющую систему электронным потоком и энергией, выводимой высокочастотным полем (вывод в нагрузку, потери на омический нагрев за счет скин-эффекта и прочие потери).

Таким образом, наша задача свелась к исследованию продольного движения ультрарелятивистского потока электронов в поле бегущей волны постоянной амплитуды $E_0 e^{i(\omega t - \beta_m z)}$.

2. ОЦЕНКА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Определим теперь, основываясь на качественных соображениях, область параметров, благоприятную с точки зрения достижения высоких КПД. Иначе говоря, найдем условия, при которых электроны, образующие на входе в рабочее пространство стационарный поток, под действием волны изменяют свою скорость и соберутся в компактные сгустки, локализованные в тормозящей фазе поля, которые при последующем торможении отдадут свою энергию волне.

Взаимодействие электрона с волной в замедляющей системе длиной L сохраняет синхронный характер в течение длительного времени

$$T = \frac{L}{v_{||}},$$

если фазовое смещение ϑ электрона относительно волны не превосходит ее периода:

$$|\vartheta| = |\omega T - \beta_m L| \leq 2\pi \quad (2.1)$$

Фазовое смещение ϑ может быть обусловлено двумя причинами:

1. кинематической – существующей уже в начальный момент отстройкой фазовой скорости волны от скорости электрона.
2. динамической – происходящим под действием волны изменением продольной скорости $v_{||}$ вследствие приращения энергии.

Каждое из этих смещений согласно (2.1) не должно превышать 2π .

Кинематическое смещение

$$\vartheta_{\text{кин}} = \omega \frac{L}{v_{||}} - \omega \frac{L}{v_{\phi}} = kcL \frac{(v_{\phi} - v_{||})}{v_{\phi} v_{||}} \approx \frac{2\pi}{\lambda} L \frac{v_{\phi} - v_{||}}{v_{||}},$$

отсюда

$$L \left(\frac{v_{\phi} - v_{||}}{v_{||}} \right) \leq \lambda. \quad (2.2)$$

Динамическое смещение

$$\vartheta_{\text{дин}} = \omega \frac{\delta v_{||}}{v_{||}^2} L = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{\delta v_{||}}{v_{||}^2} L \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\delta v_{||}}{c} L.$$

Тогда

$$\frac{\delta v_{\parallel}}{c} L \leq \lambda. \quad (2.3)$$

Изменение кинетической энергии электрона равно работе волны над электроном

$$\delta \varepsilon = e E_0 L. \quad (2.4)$$

Изменение скорости электронов можно определить из соотношения:

$$\delta v_{\parallel} = \frac{c^2}{v_{\parallel}} \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2}, \quad (2.5)$$

которое получается из равенства

$$\gamma = \frac{m c^2}{m_0 c^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\parallel}^2}{c^2}}}$$

$$v_{\parallel}^2 = c^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2} \right)$$

Если продифференцировать обе части получаем

$$2 v_{\parallel} \delta v_{\parallel} = 2 c^2 \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^3} \delta \varepsilon \rightarrow \delta v_{\parallel} = \frac{c^2}{v_{\parallel}} \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2}$$

($\varepsilon_0 = m_0 c^2$ – энергия покоя электрона).

Для доли относительной энергии, которую при выполнении условий (2.2) и (2.3) электроны в среднем отдают волне, справедлива оценка

$$\eta \sim \frac{|\delta \varepsilon|}{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Чтобы величина параметра η , имеющего смысл КПД взаимодействия электромагнитной волны с электронным потоком, составляла достаточно большую часть единицы, необходимо

$$|\delta \varepsilon| \sim \varepsilon. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.5), имеем

$$\delta v_{\parallel} \approx c \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2} = \frac{c}{\gamma^2} \quad (2.8)$$

Из (2.8) и (2.3) получим

$$L = \lambda \gamma^2. \quad (2.9)$$

Тогда из (2.2) и (2.9)

$$\frac{v_{\phi} - v_{\parallel}}{v_{\parallel}} \approx \frac{1}{\gamma^2},$$

А из (2.4) и (2.9) имеем для так называемого *ускорительного параметра волны*:

$$\alpha = \frac{eE_0\lambda}{m_0c^2} \approx \frac{1}{\gamma}.$$

Таким образом, оценки показывают, что оптимальные параметры должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$L_{\text{опт}} = \lambda\gamma^2, \quad \frac{eE_0\lambda\gamma}{m_0c^2} \approx 1, \quad \frac{v_{\phi} - v_{\parallel}}{v_{\parallel}} \approx \frac{1}{\gamma^2}. \quad (2.10)$$

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ЛБВ

Согласно пунктам 1-5 раздела 1 наша задача свелась к исследованию движения ультрарелятивистских электронов в поле бегущей волны постоянной амплитуды, которое мы будем ниже считать равным

$$E_z = -E_0 \sin(hz - \omega t). \quad (3.1)$$

Здесь z – продольная координата, $h \equiv \beta_m$ – постоянная распространения. При релятивистских скоростях электронов удобнее пользоваться относительной энергией электрона γ , равной отношению энергии электрона $\varepsilon = mc^2$ к энергии покоя $\varepsilon_0 = m_0c^2$. Из закона сохранения энергии

$$\gamma = 1 + \frac{eU}{m_0c^2} \quad (3.2)$$

Тогда изменение энергии электрона под действием поля

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{e}{m_0c^2} \frac{dU}{dz} = -\frac{eE_z}{m_0c^2} = \frac{eE_0}{m_0c^2} \sin(hz - \omega t).$$

Обозначим через $hz - \omega t = \theta$ – фазу электрона относительно ВЧ поля.

Изменение фазы запишется как

$$\frac{d\theta}{dz} = h - \omega \frac{dt}{dz} = h - \frac{\omega}{v_{\parallel}}.$$

Таким образом, мы получили два уравнения

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{eE_0}{m_0c^2} \sin(hz - \omega t), \quad (3.3)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = h - \frac{\omega}{v_{\parallel}}. \quad (3.4)$$

Будем полагать, что энергия электронов

$$\gamma = \gamma_0(1 + u), \quad (3.5)$$

где γ_0 – энергия частицы на входе в систему, u – относительное изменение энергии под действием поля.

Выразим через u и γ_0 величину v_{\parallel} , считая u малым:

$$v_{||} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_0^2(1+u)^2}} \approx c \sqrt{1 - (1-2u) \frac{1}{\gamma_0^2}} = c \sqrt{\beta_{||0}^2 + 2u \frac{1}{\gamma_0^2}}$$

$$\approx c\beta_{||0} \left(1 + \frac{u\gamma_0^{-2}}{\beta_{||0}^2}\right).$$

Подставляя теперь это выражение в (3.4), получаем

$$\frac{d\theta}{dz} = h - \frac{\omega}{c\beta_{||0} \left(1 + \frac{u\gamma_0^{-2}}{\beta_{||0}^2}\right)} \approx h - \frac{\omega}{v_{||0}} \left(1 - \frac{u\gamma_0^{-2}}{\beta_{||0}^2}\right) = h - \frac{\omega}{v_{||0}} + \frac{\omega}{v_{||0}} \frac{u\gamma_0^{-2}}{\beta_{||0}^2}.$$

Преобразуем последнее уравнение так, чтобы коэффициент при u был равен единице и введем безразмерную длину

$$\xi = \frac{z\omega\gamma_0^{-2}}{c\beta_{||0}^3} \quad (3.6)$$

и безразмерную расстройку синхронизма

$$\Delta = \left(\frac{\omega}{v_{||0}} - h\right) \frac{c\beta_{||0}^3}{\omega\gamma_0^{-2}}. \quad (3.7)$$

Тогда уравнение для фазы приводится к виду

$$\frac{d\theta}{d\xi} = u - \Delta. \quad (3.8)$$

Подставляя теперь (3.5) в (3.3) и переходя к безразмерной длине ξ получаем, что (3.3) преобразуется к виду:

$$\frac{du}{d\xi} = F \sin(\theta), \quad (3.9)$$

где

$$F = \frac{c\beta_{||0}^3 e E_0 \gamma_0}{\omega m_0 c^2}. \quad (3.10)$$

К уравнениям (3.8) и (3.9) необходимо добавить еще граничные условия. Будем считать пучок на входе ($\xi = 0$) стационарным и моноэнергетичным. Тогда граничные условия запишутся в виде

$$u(0) = 0,$$

$$\theta(0) = \theta_0 \in [0, 2\pi].$$

Найдем теперь выражение для электронного КПД η . Последний можно определить как усредненное по начальным фазам θ_0 отношение приращения энергии в некоторой плоскости к первоначальной энергии электрона

$$\eta(\xi) = \left\langle \frac{\varepsilon(\xi) - \varepsilon(0)}{\varepsilon(0)} \right\rangle. \quad (3.11)$$

Из (3.11) и (3.5) получим

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) d\theta_0. \quad (3.12)$$

Оценим оптимальные величины введенных безразмерных параметров, учитывая что $\gamma_0 \gg 1$, $\beta_{||0} \approx 1$, $v_{||} \approx c$ и $v_{\phi} \approx c$.

Из (3.6) и (2.10) получаем

$$\xi = \frac{z\omega\gamma_0^{-2}}{c\beta_{||0}^3} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{z}{\gamma_0^2 \beta_{||0}^3} \approx 2\pi \frac{z}{L_{\text{опт}}},$$

следовательно $\xi_{\text{опт}} = 2\pi$.

Для расстройки Δ имеем

$$\Delta = \left(\frac{\omega}{v_{||0}} - h \right) \frac{c\beta_{||0}^3}{\omega\gamma_0^{-2}} = \left(\frac{\omega}{v_{||0}} - \frac{\omega}{v_{\phi}} \right) \frac{c\beta_{||0}^3}{\omega\gamma_0^{-2}} \approx \frac{v_{\phi} - v_{||0}}{v_{\phi}} \frac{\beta_{||0}^2}{\gamma_0^{-2}} \approx \frac{v_{\phi} - v_{||0}}{v_{\phi}} \frac{1}{\gamma_0^{-2}}.$$

Тогда, учитывая (2.10), получаем $\Delta_{\text{опт}} \approx -1$.

Безразмерная амплитуда поля

$$F = \frac{c\beta_{||0}^3 eE_0\gamma_0}{\omega m_0 c^2} = \frac{\lambda}{2\pi} \beta_{||0}^3 \frac{eE_0\gamma_0}{m_0 c^2} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{eE_0\lambda\gamma_0}{m_0 c^2}.$$

Сравнивая это выражение с (2.10), получаем $F_{\text{опт}} \approx 1/2\pi$.

Уравнения (3.8) и (3.9) можно еще больше упростить, если произвести замену

$$z = \xi\sqrt{F}, x_2 = \frac{u}{\sqrt{F}}, \delta = \frac{\Delta}{\sqrt{F}}, x_1 = \theta \quad (3.13)$$

Тогда (3.8) и (3.9) приводятся к виду, зависящему только от одного безразмерного параметра – новой расстройки синхронизма δ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \delta, \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

с начальными условиями

$$x_2(0) = 0, x_1(0) = \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (3.15)$$

Тогда электронный КПД выражается так

$$\eta = \sqrt{F}W, \quad (3.16)$$

где W – так называемый приведенный электронный КПД равный

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_2 d\theta_0. \quad (3.17)$$

Точкой обозначено дифференцирование по продольной координате z . Используя полученные выше оценки оптимальных параметров, получаем, что в новых переменных

$$\begin{aligned} z_{\text{опт}} &= \xi_{\text{опт}}\sqrt{F_{\text{опт}}} \approx \sqrt{2\pi} \approx 2,5, \\ \delta_{\text{опт}} &= \frac{\Delta_{\text{опт}}}{\sqrt{F_{\text{опт}}}} \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx -0,4. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Повторным дифференцированием первого из уравнений (3.14) и подстановкой во второе наша система сводится к одному уравнению

второго порядка

$$\ddot{x}_1 = \sin(x_1), \quad (3.19)$$

совпадающему по форме с уравнением колебаний физического маятника.

Уравнение (3.19) имеет первый интеграл, который с учетом начальных условий (3.15) можно записать как

$$\dot{x}_1^2 + 2 \cos(x_1) = \delta^2 + 2 \cos(\theta_0). \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) позволяет нарисовать фазовый портрет нашей системы, качественный вид которой изображен на рисунке 3.1.

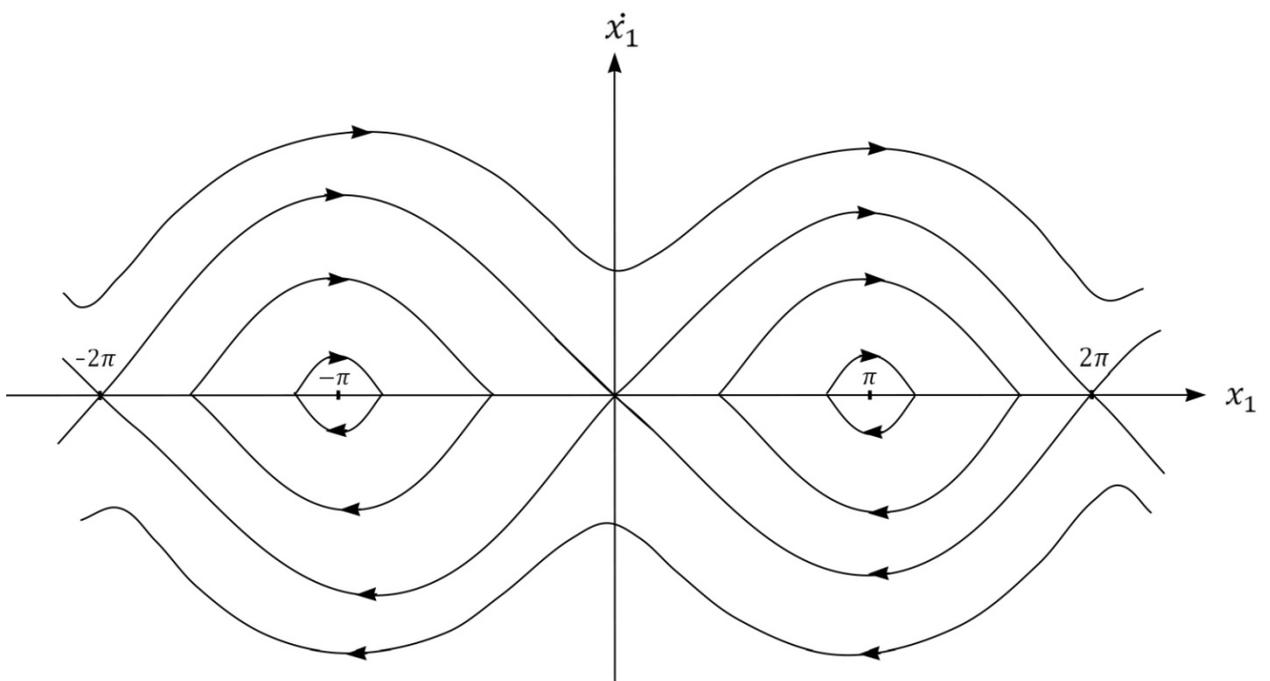


Рис. 3.1 Фазовый портрет системы (3.19)

4. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Согласно пункту 3 движение каждого электрона описывается уравнениями (3.14) с начальным условием (3.15). При этом для строгого описания процесса взаимодействия электронного потока с полем волны необходимо решить уравнения (3.14) со всевозможными начальными фазами θ_0 , то есть с бесконечным числом частиц, что практически невозможно. Поэтому при численном моделировании весь поток вместо бесконечного числа частиц разбивается на N частиц (производится так называемая дискретизация исходной задачи), начальные фазы которых равномерно распределены внутри интервала $[0, 2\pi]$ и находятся из выражения

$$\theta_j = \frac{2\pi}{N}(j - 0,5), \quad j = \overline{1, N} \quad (4.1)$$

(при $N \rightarrow \infty$ мы получим наше исходное непрерывное распределение). Погрешность от такой замены и необходимое число частиц N обычно находят, сравнивая результаты моделирования с разным числом частиц N .

Таким образом, для моделирования процесса взаимодействия нам необходимо решить N уравнений движения частиц

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1j} &= x_{2j} - \delta, \\ \dot{x}_{2j} &= \sin(x_{1j}), \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

с начальными фазами (4.1). Известно много методов решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, к которым относится система (4.2). Одним из наиболее простых является метод, согласно которому величины $x_1(z + \Delta z)$ и $x_2(z + \Delta z)$ представляются в виде отрезков ряда Тейлора относительно некоторой точки z . Ниже использован метод рядов Тейлора 4-ого порядка, согласно которому

$$\begin{aligned} x_1(z + \Delta z) &= x_1(z) + \dot{x}_1(z)\Delta z + \ddot{x}_1(z)\frac{(\Delta z)^2}{2!} + \dddot{x}_1(z)\frac{(\Delta z)^3}{3!} + (x_1(z))^{(4)}\frac{(\Delta z)^4}{4!}, \\ x_2(z + \Delta z) &= x_2(z) + \dot{x}_2(z)\Delta z + \ddot{x}_2(z)\frac{(\Delta z)^2}{2!} + \ddot{x}_2(z)\frac{(\Delta z)^3}{3!} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Величины соответствующих производных находятся дифференцированием уравнений движения (3.14):

$$\dot{x}_1 = x_2 - \delta, \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = \sin(x_1), \ddot{\dot{x}}_1 = \ddot{x}_2 = \cos(x_1)\dot{x}_1,$$

$$x_1^{(4)} = \ddot{\dot{x}}_2 = -\sin(x_1)\dot{x}_1^2 + \cos(x_1)\ddot{x}_1$$

Шаг интегрирования уравнений движения Δz определяется допустимой погрешностью решения и, очевидно, должен быть существенно меньше масштаба изменения правой части уравнения движения. При не очень высоких КПД

$$x_2 \approx -\delta z \rightarrow \dot{x}_2 \approx -\sin(\delta z).$$

Характерный масштаб изменения синуса $\approx \pi/4$, следовательно для Δz должно выполняться неравенство $\delta \Delta z \ll \pi/4$. Тогда, учитывая что $|\delta| \approx 1$ (см. (3.18)) получаем, что безразмерный шаг $\Delta z \approx \frac{\pi}{4\delta^{10}} \approx 0,1$.

5. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Блок-схема программы¹, реализующей описанный выше алгоритм, приведена на рисунке 5.1.

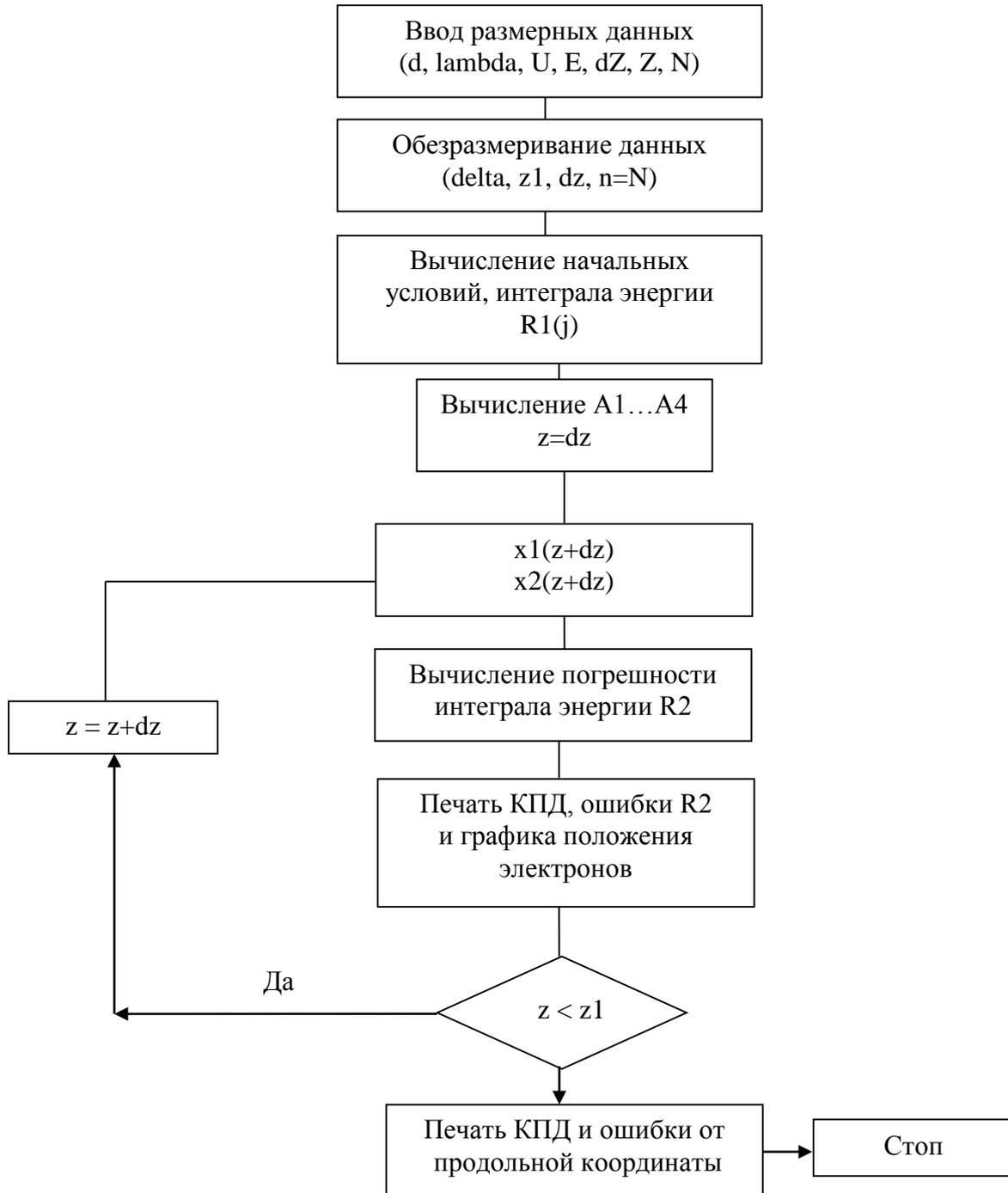


Рис. 5.1 Блок-схема исполняющей программы

¹ Здесь мы описываем только исполняющую данный алгоритм программу, а не все приложение с графическим интерфейсом, реализованное в среде MATLAB.

Здесь и далее приняты следующие обозначения:

d – период замедляющей системы (ЗС),

λ – длины волны в свободном пространстве,

U, E – ускоряющее напряжение и амплитуда ВЧ поля,

dZ, Z – соответственно **размерные** шаг интегрирования и длина ЗС,

N – число частиц,

δ, z_1, dz – безразмерные расстройка синхронизма, длина ЗС и шаг интегрирования,

w – текущий приведенный КПД, который подсчитывается по формуле (3.17) с использованием простейшей формулы прямоугольников,

R_2 – максимальная ошибка на шаге интегрирования, равная нормированной на максимальное значение интеграла энергии разности между текущим R и начальным R_1 значением интеграла энергии:

$$R_2 = \max_j \frac{|R_j - R_{1j}|}{(2 + \delta^2)}, \quad (5.1)$$

R_j – текущее значение интеграла энергии, равное

$$\dot{x}_{1j}^2 + 2 \cos(x_{1j}),$$

R_{1j} – точное значение интеграла энергии -ого электрона, равное

$$\delta^2 + 2 \cos(\theta_j),$$

v_1, v_2, v_3, v_4 – соответственно $x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, x_1^{(4)}$.

Работа программы происходит следующим образом. Пользователем вводятся размерные начальные данные (d , λ , U , E , dZ , Z и N) в главное диалоговое окно изображенное на рис. 5.2. Значения U , d фиксированы (указываются преподавателем) и при изменении d автоматически выводятся длины волн, соответствующие границам полосы пропускания волновода. Для величин U , E , dZ и Z существуют оптимальные значения, которые находятся в некоторых пределах (см. оценки (2.10)). Если пользователь вводит неверное значение, напротив соответствующей строки выводится предупреждение. В этом же окне можно посмотреть геометрические размеры волновода и его дисперсионную характеристику, соответственно нажав на кнопки «Конфигурация замедляющей системы» и «Дисперсионная характеристика волновода».

Конфигурация замедляющей системы

Дисперсионная характеристика волновода

Ввод параметров моделирования

Период замедляющей системы d (cm)

Длина волны λ (cm) Полоса пропускания - см

Ускоряющее напряжение U (kV)

Амплитуда ВЧ поля E (kV/mm)

Шаг интегрирования dz (cm)

Длина замедляющей системы Z (cm)

Количество частиц

Положение рабочей точки

Рис. 5.2 Главное диалоговое окно программы моделирования

После ввода всех данных и нажатия кнопки «Положение рабочей точки» на экране появляется дисперсионная характеристика волновода (β) и электронного

пучка, показанные на рис. 5.3 (синяя кривая и фиолетовая прямая соответственно). Здесь же пунктиром показано положение так называемого «светового конуса». По пересечению дисперсионных кривых можно судить насколько правильно введена длина волны для определения ее фазовой скорости. Если высветилось предупреждение о неправильном вводе длины волны или требуется корректировка входных данных можно вернуться в главное окно по команде «Изменить параметры».

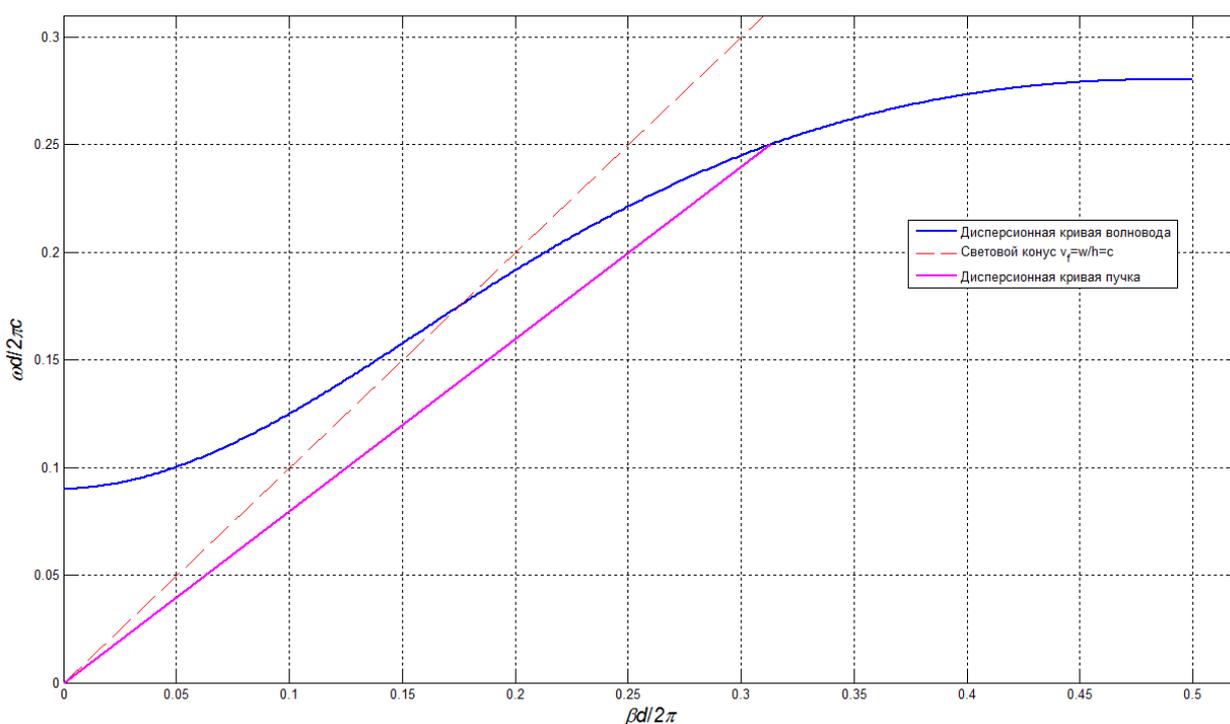


Рис. 5.3 Нахождение рабочей точки по дисперсионной кривой

Если нас устраивает положение рабочей точки на дисперсионной кривой, то по команде «Запуск программы» мы осуществляем переход в рабочую область программы, где решается система уравнений (4.2) и выводятся зависимости электронного КПД и максимальной ошибки R2 на шаге интегрирования от размерной длины Z и отображается положение электронов относительно фазы СВЧ силы (см. рис. 5.4-5.5, фаза силы обозначена красным цветом).

После того как программа закончила работу выводится диалоговое окно «Выходные данные программы моделирования» в котором указывается

экстремум электронного КПД на всей длине ЗС, максимальная ошибка интегрирования R2 и значение координаты, при которой достигается максимум или минимум КПД. Изображение рабочей области программы и вывод конечных данных приведены на рис. 5.4 – 5.7.

Так как мы решаем уравнения вида (4.2), то программа сначала комбинирует и переводит все размерные данные по формулам из п.3 в безразмерные Δz , $z1$, dz , и чтобы рассчитать начальные фазы, энергии частиц, значения интеграла энергии R1(j) и коэффициенты $a1 \dots a4$, равные $\Delta z \dots \frac{(\Delta z)^4}{4!}$. Затем по формулам (4.3) и (3.17) находятся фазы и энергии частиц на очередном шаге интегрирования уравнения движения, при этом программа сразу же отображает положение (фазу) электронов на экране дисплея относительно периода ВЧ поля, в который первоначально попали электроны (выделен красным цветом). По формуле (5.1) определяется максимальная по всем электронам погрешность R2 и вместе с электронным КПД $\eta = w * \sqrt{F}$ выводится в соответствующие окна на экране. Программа заканчивает работу, когда $z = z1$.

В качестве примера рассмотрим работу нашей программы при следующих входных данных : $d = 1$ см, $\lambda = 4$ см, $U = 500$ кВ, $E = 3$ кВ/мм, $dZ = 0.4$ см, $Z = 45$ см, $N = 32$. Положение рабочей точки на дисперсионной характеристике и начальное положение электронов на входе в систему показаны на рис. 5.3 и 5.4 соответственно.

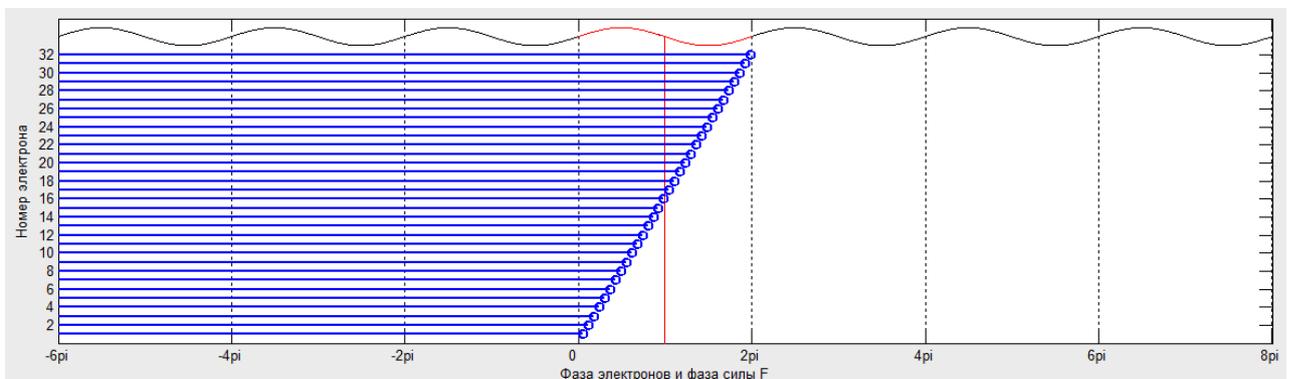


Рис. 5.4 Начальное положение электронов: частицы равномерно распределены по фазам ВЧ поля

При правильном выборе параметров можно увидеть образование электронных сгустков в тормозящей фазе, при этом КПД стремится к максимальному значению что показано на рис. 5.5.

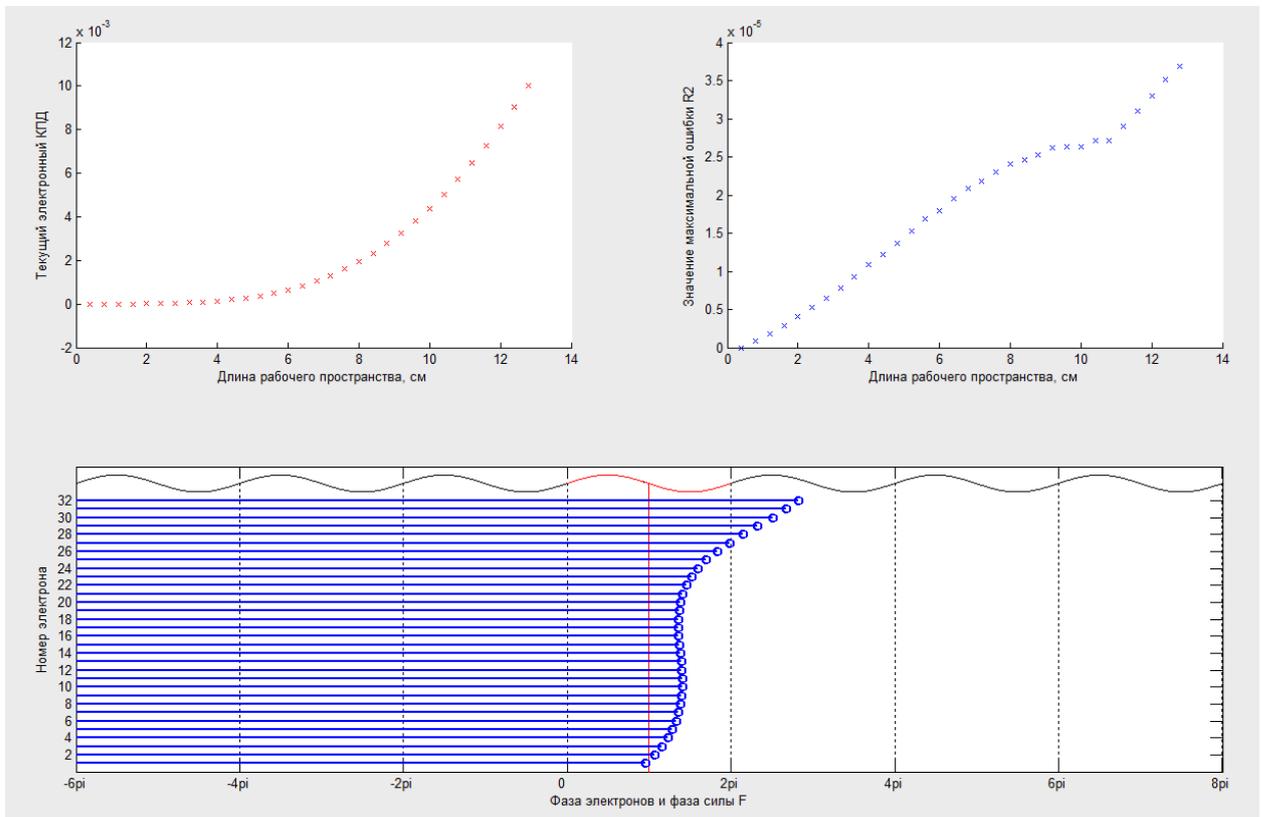


Рис 5.5 Группировка электронов в тормозящей фазе (сверху показаны зависимости электронного КПД и ошибки интегрирования от продольной координаты)

Если длина ЗС становится слишком большой, то сгусток распадается и часть электронов переходят в ускоряющую область (рис.5.6). КПД начинает уменьшаться, и если еще увеличить длину ЗС, то можно наблюдать осцилляцию КПД.

Состояние системы на выходе ЗС и диалоговое окно с выходными данными представлены на рис. 5.6 и 5.7.

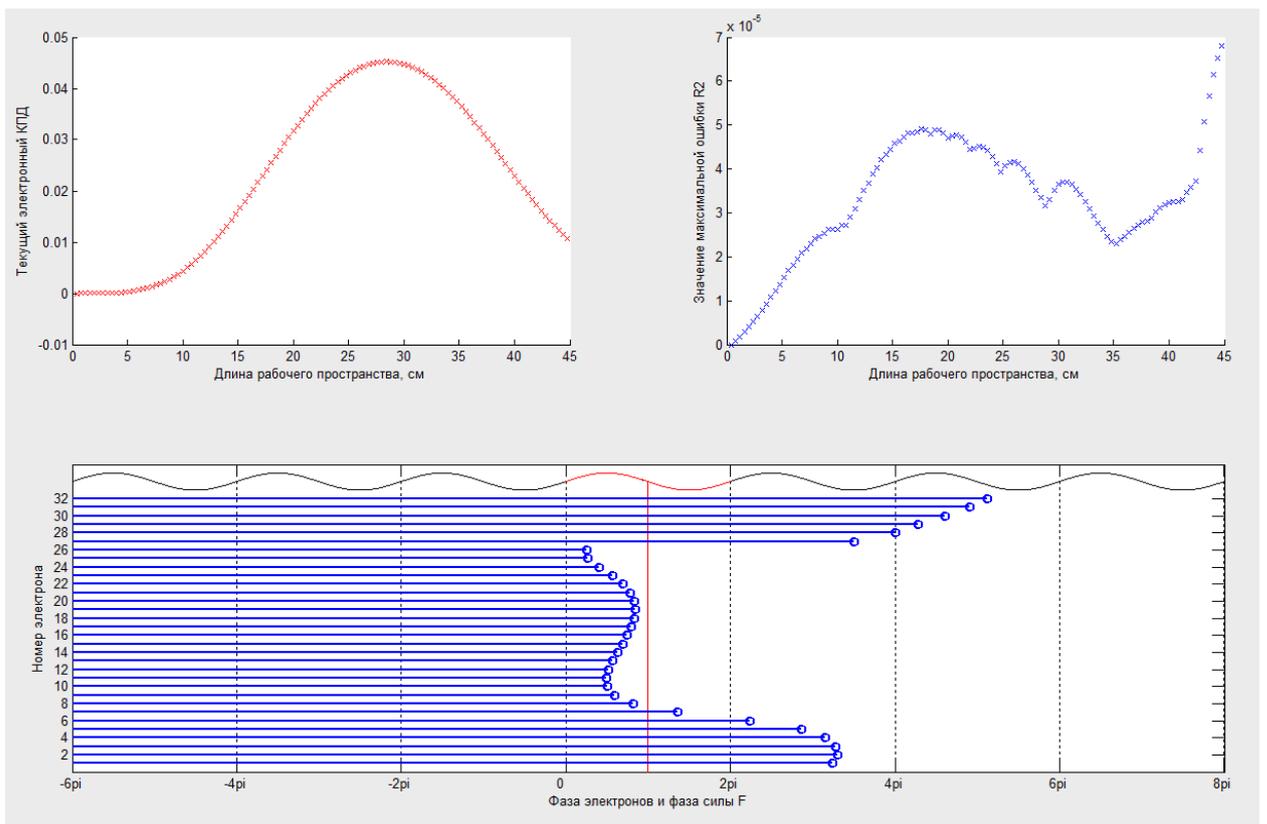


Рис 5.6 Состояние системы на выходе ЗС

Экстремум электронного КПД	0.0452047
Длина ЗС при экстремуме КПД, см	28.4
Максимальная ошибка R2	6.80311e-05
<input type="button" value="Перейти к вводу данных"/>	

Рис 5.7 Диалоговое окно с выходными данными

6. ВОЗМОЖНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Описанная выше методика моделирования основана на методе крупных частиц. При этом число крупных частиц N может варьироваться от нескольких десятков до нескольких тысяч или даже десятков тысяч для получения решения задачи с заданной высокой точностью. Соответственно, время поиска оптимального варианта при указанных N может оказаться достаточно большим (см. ниже практическое задание). Поэтому эффективным подходом, сокращающим время моделирования, является распараллеливание вычислений. В последнее время достигнут значительный прогресс в разработке многопроцессорных (многоядерных) вычислительных систем. Использование последних позволяет существенно сократить время вычислений. Как известно, в настоящее время наиболее распространенными стандартами параллельного программирования являются MPI и OpenMP. Преимуществом MPI является, в частности, возможность работы с очень большими объемами данных, однако он характеризуется значительными затратами на обмен данными между процессорами, зависящими от скорости работы локальной сети, соединяющей в сеть отдельные вычислительные узлы. В рассмотренном нами выше алгоритме объем массивов данных невелик (он лишь в несколько раз превышает число N), а движение каждой частицы происходит независимо от других (основные вычислительные ресурсы при моделировании тратятся на интегрирование уравнений движения частиц (4.2)-(4.3)). Поэтому доля межпроцессорных обменов очень мала. В результате более эффективным для нашей задачи будет использование многопроцессорных вычислительных систем с общей памятью на базе стандарта OpenMP в которых обычно предполагается, что имеющиеся в составе системы процессоры обладают равной производительностью, являются равноправными при доступе к общей памяти, и время доступа к памяти является одинаковым. Подобные системы именуются симметричными мультипроцессорами. Перечисленному выше набору предположений

удовлетворяют описанные выше многоядерные процессоры, в которых каждое ядро представляет практически независимо функционирующее вычислительное устройство.

Согласно пункту 3 для численного моделирования взаимодействия электронного потока с полем волны весь поток разбивается на N частиц (производится так называемая дискретизация задачи). Далее необходимо решить уравнения движения (4.2) со всевозможными начальными фазами θ_0 . Описанный выше подход представляется достаточно перспективным, когда нужно выполнить одни и те же действия многократно или, когда один и тот же программный код может быть применен для выполнения обработки разных данных.

Организация вычислений для многопроцессорных вычислительных систем с общей памятью традиционно основана на создании новых параллельных методов на основе обычных последовательных программ, в которых программистом выделяются участки независимых друг от друга вычислений. Указания программиста по организации параллельных вычислений добавляются в программу при помощи тех или иных внеязыковых средств языка программирования – например, в виде директив или комментариев, которые обрабатываются специальным препроцессором до начала компиляции программы. При этом исходный текст программы остается неизменным, и по нему, в случае отсутствия препроцессора, компилятор построит исходный последовательный программный код. Препроцессор же, будучи примененным, заменяет директивы параллелизма на некоторый дополнительный программный код (как правило, в виде обращений к процедурам какой-либо параллельной библиотеки). Рассмотренный выше подход является основой технологии OpenMP, наиболее широко применяемой в настоящее время для организации параллельных вычислений на многопроцессорных системах с общей памятью. В рамках данной технологии директивы параллелизма используются для выделения в программе параллельных фрагментов, в которых последовательный исполняемый код может быть разделен на несколько отдельных командных

потоков (threads). Далее эти потоки могут исполняться на разных процессорах (процессорных ядрах) вычислительной системы. В результате такого подхода программа представляется в виде набора последовательных (однопоточковых) и параллельных (многопоточковых) участков программного кода.

Основные достоинства технологии OpenMP следующие.

- Технология OpenMP позволяет в максимальной степени эффективно реализовать возможности многопроцессорных вычислительных систем с общей памятью, обеспечивая использование общих данных для параллельно выполняемых потоков без каких-либо трудоемких межпроцессорных передач сообщений.
- Сложность разработки параллельной программы с использованием технологии OpenMP в значительной степени согласуется со сложностью решаемой задачи – распараллеливание сравнительно простых последовательных программ, как правило, не требует больших усилий (порой достаточно включить в последовательную программу всего лишь несколько директив OpenMP); это позволяет, в частности, разрабатывать параллельные программы и прикладным разработчикам, не имеющим большого опыта в параллельном программировании.
- Технология OpenMP обеспечивает возможность поэтапной (инкрементной) разработки параллельных программы – директивы OpenMP могут добавляться в последовательную программу постепенно (поэтапно), позволяя уже на ранних этапах разработки получать параллельные программы, готовые к применению; при этом важно отметить, что программный код получаемых последовательного и параллельного вариантов программы является единым и это в значительной степени упрощает проблему сопровождения, развития и совершенствования программ.
- OpenMP позволяет в значительной степени снизить остроту проблемы переносимости параллельных программ между разными компьютерными

системами – параллельная программа, разработанная на алгоритмическом языке C или Fortran с использованием технологии OpenMP, как правило, будет работать для разных вычислительных систем с общей памятью.

Остановимся теперь кратко на алгоритме параллельной реализации описанного выше (см. разделы 4 и 5) алгоритма моделирования. Соответствующая блок-схема модифицированного под OpenMP кода представлена на рис.6.1. Пусть в нашем распоряжении находится p процессоров, где p в общем не кратно N . Тогда после ввода данных, их обезразмеривания и вычисления констант, общих для всех уравнений движения, каждому из процессоров с номером j ($j=1,2,\dots,p$) поручается интегрирование $k=[N/(p-1)]$ уравнений движения частиц с номерами соответственно от $1+(j-1)*k$ до $j*k$ ($j=1,2,\dots,p-1$). Очевидно, последнему p -ому процессору, достанется меньшее число частиц (их номера находятся в интервале $(p-1)*k$ до N) и он закончит свою работу раньше. Поэтому необходимо еще организовать синхронизацию процессов (процесс, закончивший вычисления раньше, ждет окончания работы самого медленного процесса). После окончания работы всех процессов процесс с номером $p=0$ обрабатывает результаты расчета и по массивам x_{1i} , x_{2i} ($i=1,2,\dots,N$) вычисляет зависимости КПД и ошибки интегрирования от текущей координаты и производит визуализацию результатов расчета. На этом работа алгоритма заканчивается.



Рис 6.1 Блок-схема распараллеливания алгоритма. J – номер процессора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены принцип действия и устройство ЛБВ, даны качественные оценки оптимальных параметров релятивистской ЛБВ и выведены уравнения, описывающие группировку электронов в поле бегущей волны для простейшей модели с постоянной амплитудой ВЧ поля. Описана методика численного решения указанных уравнений как при реализации последовательного (однопроцессорные системы, малое число частиц) , так и параллельного кода (многопроцессорные системы, больше число частиц). Дано подробное описание программы моделирования и инструкций пользователю для проведения численного моделирования ЛБВ. Обоснован выбор методики распараллеливания программы моделирования при большом числе частиц, базирующийся на стандарте OpenMP.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мануилов В.Н., Принципы работы мощных электронных приборов СВЧ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Издательство ННГУ им. Лобачевского, 2012. – 50с.
2. Мануилов В.Н., Исследование черенковского механизма излучения электронов в релятивистской лампе бегущей волны: Описание лабораторной работы. – Горький, 1986.
3. Описание ЛБВ модели Siemens RW3 TWT, 2007. [Электронный ресурс] – <http://www.microwave-museum.org/exhibits/mwm0013.htm>
4. Сушков А.Д., Вакуумная электроника. 2009 г.
5. В. Н. Дулин “ Электронные и квантовые приборы СВЧ” М. Энергия, 1972.
6. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М., “Сов. Радио”, 1970, 584 с.
7. Лебедев И.В. Техника и приборы сверхвысоких частот. т. II. Электровакуумные приборы СВЧ. М., Высшая школа, 1972, 376 с.
8. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. Сов. радио. М.: 1973.
9. Жеребцов И.И. Электроника. Энергоатомиздат. М.: 1990.
10. Электронные приборы. / Под ред. Г.Г. Шишкина. 4-е изд. М: Энергоатомиздат, 1989. 496 с.
11. В.М.Березин, В.С.Буряк, Э.М.Гутцайт, В.П.Марин. Электронные приборы СВЧ. М. : Высшая школа, 1985. 296 с.
12. Гапонов В.И. Электроника, ч.1, 2. М.: 1960.
13. Гайдук В.И., Палатов И.И., Петров Д.М. Физические основы электроники СВЧ., Сов. радио., М.: 1971.
14. Голант М.Б., Бобровский Ю.А. Генераторы СВЧ малой мощности. Сов. радио., М.: 1977.
15. Электронные приборы сверхвысоких частот. Уч. пособие под ред. В.М.Шевчика и М.А.Григорьева. Изд. СГУ. Саратов: 1980.
16. Дж.Е.Роу. Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот. М.: "Сов. Радио", 1969. 616 с.
17. Гергель В.П. Высокопроизводительные вычисления для многоядерных многопроцессорных систем: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Издательство ННГУ им. Лобачевского, 2010. – 421с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Практическое задание

1. Для трех значений ускоряющего напряжения U и периода d замедляющей системы

$$U=500, 1000, 1500 \text{ кВ}; d=0.5, 1, 3, 5 \text{ см}$$

указанных преподавателем, по дисперсионной характеристике волновода (см.

Приложение) оцените диапазон частот, при котором будут выполняться условия

$$v_{\text{фаз}} < c, \quad v_{\text{пучка}} > v_{\text{фаз}}, \quad v_{\text{пучка}} \approx v_{\text{фаз}}.$$

По найденным диапазонам частот выберите среднюю длину волны $\lambda_{\text{ср}}$ при которой будет происходить усиление СВЧ сигналов (то есть такую длину волны при которой хорошо выполняется условие черенковского синхронизма). Полученные значения $\lambda_{\text{ср}}$ занести в таблицу.

$U, \text{кВ}$ \ / \ $d, \text{см}$	0.5	1	3	5
500				
1000				
1500				

Примечание. На графике дисперсионной кривой по осям отложены значения

$$Y = \omega d / 2\pi c, \quad X = \beta d / 2\pi, \text{ причем}$$

$$Y_{\min} = 0.09 \quad Y_{\max} = 0.28$$

$$X_{\min} = 0 \quad X_{\max} = 0.5$$

$$Y = \frac{\omega d}{2\pi c} = \frac{d}{\lambda}$$

2. По формулам оценки оптимальных параметров оцените значение расстройки, длины замедляющей системы и амплитуды ВЧ поля как

$$L_{\text{опт}} = \lambda \gamma^2, \quad \frac{eE_0 \lambda \gamma}{m_0 c^2} \approx 1, \quad \frac{v_{\phi} - v_{\parallel}}{v_{\parallel}} \approx \frac{1}{\gamma^2}$$

для каждого значения U , d и $\lambda = \lambda_{\text{ср}}$ из первого задания.

3. Запустите программу численного моделирования и задайте размерные величины:

- Период d замедляющей системы;
- Длину волны λ (оценочное значение $\lambda_{\text{ср}}$);
- Ускоряющее напряжение U ;
- Амплитуду ВЧ поля E ;
- Шаг интегрирования dZ ;
- Длину замедляющей системы Z ($Z \in [L_{\text{опт}}, 5L_{\text{опт}}]$);
- Количество электронов N .

Моделирование производится для одного значения $[U, d]$ из задания 1, которое указывается преподавателем.

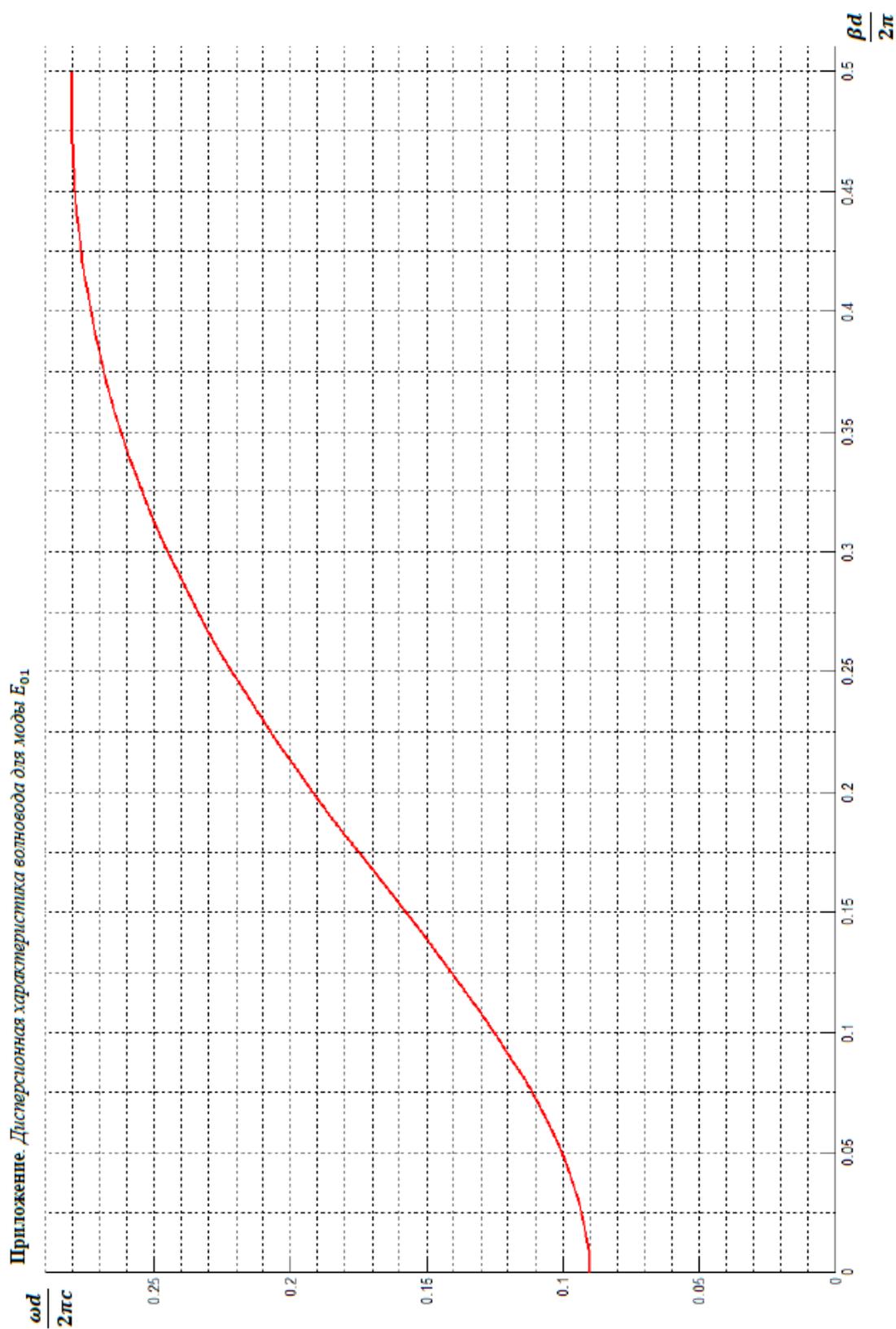
После этого, путем многократного прогона этого варианта, определите значения параметров N и dZ , обеспечивающих нужную точность. Обоснуйте выбор N и dZ .

4. Для значения $[U, d]$ *из задания 3*, изменяя λ и E , подобрать *оптимальную длину волны, длину ЗС и амплитуду ВЧ поля*, при которых достигается максимум КПД. Сравнить полученные величины с оценочными значениями, найденными в задании 2.
5. При подобранных оптимальных λ из предыдущего задания для тех же значений $[U, d]$ подобрать оптимальную величину амплитуды ВЧ поля и построить зависимость $\eta_{\text{max}}(E)$ максимума КПД от E и *объяснить ее*. Построить зависимость $\eta_{\text{max}}(\lambda)$ максимума КПД от λ и *объяснить ее*.
6. Для одного выбранного варианта $[U, d, \lambda, dZ, E]$ из предыдущих заданий, меняя значение длины замедляющей системы Z , посмотреть как ведет себя КПД. Качественно нарисовать зависимость КПД для различных длин ЗС и *объяснить полученный результат*.

Контрольные вопросы к допуску по лабораторной работе

1. Что такое черенковский механизм излучения (усиления)? При каких скоростях заряженных частиц наблюдается данный эффект?
2. Для чего используется замедляющая система (ЗС) в ЛБВ?
3. Что такое пространственная гармоника?
4. Что понимают под условием синхронизма в ЛБВ?
5. Как происходит энергообмен и группировка в ЛБВ?
6. Что такое кинематическое и динамическое фазовое смещение?
7. Какие приближения используются в данной работе для рассмотрения основных особенностей работы релятивистской ЛБВ?
8. Изобразить на фазовой плоскости начальное положение электронов на входе в ЗС.
9. Найти, начиная с какой расстройки δ , отсутствуют финитные фазовые траектории.
10. Как изменится КПД η , если при том же токе пучка увеличить его радиальный размер ΔR_0 и сделать его больше λ ?
11. Как изменится КПД, если уменьшить фокусирующее магнитное поле?
12. Какие способы повышения КПД в ЛБВ вы знаете?
13. Может ли КПД быть отрицательным?
14. Как по графику приведенной дисперсионной кривой волновода оценить диапазон рабочих частот и соответствующие им длины волн?
15. Чем отличаются зависимости фазовой и групповой скорости v от частоты для гладкого и гофрированного волноводов?
16. По какой формуле определится фазовая скорость волны и продольная скорость электронов (в релятивистском приближении)? Как найти фазовую скорость из дисперсионной характеристики?
17. Какими характерными масштабами определяются шаг интегрирования и длина замедляющей системы ?

ПРИЛОЖЕНИЕ. ДИСПЕРСИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ВОЛНОВОДА



Алексей Витальевич **Климов**
Владимир Николаевич **Мануилов**
Владислав Юрьевич **Заславский**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГРУППИРОВКИ
ЭЛЕКТРОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЛАМПЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ
ВЫЧИСЛЕНИЙ**

Учебное пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. . Уч-изд. л.

Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01